

* 学术论文 *

H_∞滤波器与本征问题精细积分*

钟万勰

(大连理工大学工程力学研究所, 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

摘要 采用变分法推导, 指出在 H_∞ 滤波中的导引模 γ 的选择中, 其最优参数 γ_{cr}^{-2} 可以化成为自伴算子的最小本征值, 从而表达为二类变量变分原理的 Rayleigh 商. 引入区段混合能, 并对时不变系统给出了精细积分法; 结合本征问题的 W-W 算法 (Wittrick-Williams algorithm), 可求出几乎是计算机精度的最优参数 γ_{cr}^{-2} .

关键词 H_∞ 滤波 本征值 精细积分 Riccati 方程

真实系统不可避免有随机干扰, 而对其量测时又会有随机噪声. 实现对系统状态的最优估计是对系统进行最优控制的必要环节. 如同线性二次型 Gauss(LQG)问题一样, 在 H_∞ 鲁棒控制理论中, H_∞ 滤波与 H_∞ 控制也是互为对偶的两个方面, 从控制的角度看, 仅当全状态反馈时方才不必再作状态估计; 通常的量测反馈就需要用滤波器对状态作出估计来反馈. 控制与滤波问题可以分别求解, 称为可分理论(separation theory), 这对于 H_∞ 系统依然如此, 因此 H_∞ 滤波的计算是整个 H_∞ 鲁棒控制理论的中心环节之一^[1].

设状态空间实现为

$$\dot{x} = Ax + Bw, \text{ 已知 } x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$z = Lx, \quad (2)$$

$$y = Cx + v, \quad (3)$$

其中 $x(t)$ 为 n 维状态向量, w 为 l 维平稳白色干扰向量而 v 为 q 维平稳白色量测干扰; z 为有待估计的 p 维输出向量, A, B, C, L 为有相应维数的给定矩阵. v 与 w 无关. $(A, B), (A, C)$ 为完全可控与可测的. H_∞ 滤波问题要求找出线性、因果的算子 F , 使估计

$$\hat{z} = Fy \quad (4)$$

误差 $(\hat{z} - Lx)$ 满足

$$\int_0^T (\hat{z} - Lx)^T (\hat{z} - Lx) dt < \gamma^2 \int_0^T (w^T w + v^T v) dt, \quad (5)$$

其中 γ^2 是给定的参数, 但其界限将证明恰为 Rayleigh 商本征值.

类似的提法对无穷区段 $[0, \infty)$ 的 H_∞ 滤波也适用.

1998-04-17 收稿, 1999-07-05 收修改稿

* 国家自然科学基金(批准号: 19732020)和国家教委博士点基金资助项目

求解 H_∞ 滤波问题总是要归结到 Riccati 微分方程

$$\dot{\bar{G}} = \bar{B}B^T + \bar{A}\bar{G} + \bar{G}A^T - \bar{G}(C^TC - \gamma^{-2}L^TL)\bar{G}, \quad \bar{G}(0) = G_0 \quad (6)$$

的求解, G_0 为给定对称非负阵. 对状态 x 与输出 z 有估计 \hat{x} 及 \hat{z} , 可由以下方程解出

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \bar{G}C^T(y - C\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 = \text{已知}, \quad (7)$$

$$\hat{z} = L\hat{x}, \quad (8)$$

这就面临 γ^{-2} 的寻求以及数值求解. (符号 G 留作后用)

精细积分先在时程积分方面提出并应用^[2]; 适用于两端边值问题的对 Riccati 微分方程的精细积分可见文献[3, 4]. 精细积分对时不变系统可给出计算机上的精确解. 运用变分法的推导, 引入 Lagrange 乘子函数^[2,5], γ^{-2} 的临界值正相当于 Rayleigh 商的最小本征值, 超过它则(6)式无有界解. 对本征值的精细积分还应当运用本征问题中的扩展 W-W 算法^[6,7]. 本文在作出论述之后用算例表明这套理论的正确性及算法的有效性.

1 两端边值问题与 Rayleigh 商

(5)式的问题提法并不提供唯一解, 在所有的解中其中心解使泛函 J

$$J = \min_F \max_{w,v} \int_0^T [\gamma^{-2}(\hat{z} - Lx)^T(\hat{z} - Lx) - (w^T w + v^T v)] dt \leq 0 \quad (9)$$

取最小. 当参数 γ^{-2} 小于其临界值时有解, 临界值使上式取等号. 因为还有其状态空间实现(1)~(3)式要满足, 这是条件极值问题. 这样, (9)式代表两个问题, 临界值 γ_{cr}^{-2} 的寻求; 然后是对给定的 $\gamma^{-2} < \gamma_{cr}^{-2}$, 求出其中心解最优估计. 当选用 $\gamma^{-2} \rightarrow 0$ 时, 问题就是熟知的 Kalman 滤波.

将(3)式代入, 并对(1)式引入 Lagrange 乘子向量函数 $\lambda(t)$, 有

$$J_A = \int_0^T [\lambda^T \dot{x} - \lambda^T A x - \lambda^T B w + w^T w / 2 + (y - Cx)^T (y - Cx) / 2 - \gamma^{-2}(\hat{z} - Lx)^T (\hat{z} - Lx) / 2] dt, \quad \delta J_A = 0, \quad (10)$$

完成对 w 取最小有 $W = B^T \lambda$, 而有变分原理

$$\delta J_A = \int_0^T [\lambda^T \dot{x} - \lambda^T A x - \lambda^T B B^T \lambda / 2 + (y - Cx)^T (y - Cx) / 2 - \gamma^{-2}(\hat{z} - Lx)^T (\hat{z} - Lx) / 2] dt = 0, \quad (11)$$

其中变分只有 x , λ 执行. 完成变分运算有对偶方程

$$\dot{x} = Ax + BB^T \lambda, \quad (12a)$$

$$\dot{\lambda} = (C^T C - \gamma^{-2} L^T L)x - A^T \lambda - C^T y + \gamma^{-2} L^T \hat{z}, \quad (12b)$$

在以上推导中, 对 y , \hat{z} 都不执行变分. 因为 y 是量测输出, 为给定量; \hat{z} 则由(4)式给出, 式中算子 F 虽为待求, 但这是系统的性质, 它只与给定的参数 γ^{-2} 有关, 因为 γ^{-2} 为给定, 故 \hat{z} 并不直接与 x , λ 有关, 所以 \hat{z} 不参加变分.

作为方程(12)式的边界条件, 当 $t=0$ 时本应给出 x ; 但由于干扰的随机性质, x 也是随机的, 所以应当给出 $x(0)$ 的期望值 \hat{x}_0 以及其协方差矩阵

$$\hat{x}(0) = \hat{x}_0, \quad \bar{G}(0) = G_0, \quad x(0) = G_0 \lambda(0) + \hat{x}_0, \quad \text{当 } t=0 \text{ 时}, \quad (13)$$

至于在 $t = T$ 处则采用自然边界条件.

以下对非齐次方程组(12)求解. 从(13)式看出 x 总是其均值与零均值 Gauss 分布之和的过程. 取

$$x = \hat{x} + \bar{G}\lambda, \quad (14)$$

由方程(12a)与(12b)式可导出

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \bar{G}[C^T(y - C\hat{x}) + \gamma^{-2}L^T(L\hat{x} - \hat{z})], \quad (15)$$

$$\dot{\hat{z}} = BB^T + A\bar{G} + \bar{G}A^T - \bar{G}(C^TC - \gamma^{-2}L^TL)\bar{G}. \quad (16)$$

显然对 z 的均值应当是对(2)式取均值的(8)式, 从而有(7)式. 到此, 方程(6)~(8)皆以最简便的方法导出.

对导出的方程(6), 只有当 $\gamma^{-2} < \gamma_{cr}^{-2}$ 时才有解. 方程(7)由于有随机量 y , 只能实时执行, 故下文着重讲(16)式的积分.

方程(6)或(16)只有系统的矩阵, 而与量测 y 无关, 因此可以在变分式(11)中令 $y = 0$, $\hat{z} = 0$ 来导出. 考虑到初值条件 G_0 , 变分原理可写成

$$J_A = \int_0^T [\lambda^T \dot{\hat{x}} - H(x, \lambda)] dt + x_0^T G_0^{-1} x_0 / 2, \quad \delta J_A = 0, \quad (17)$$

$$H(x, \lambda) = \lambda^T A x - x^T (C^T C - \gamma^{-2} L^T L) x / 2 + \lambda^T B B^T \lambda / 2, \quad (18)$$

由此变分原理可导出方程(12), $y = 0$, $\hat{z} = 0$, 及初值条件 $\lambda_0 = G_0^{-1} x_0$ 与 $\lambda(T) = 0$ 的终值条件. 变分式(17)也可写成.

$$\delta(\Pi_1 - \gamma_{cr}^{-2} \Pi_2) = 0, \quad (19)$$

$$\Pi_1 = \int_0^T (\lambda^T \dot{\hat{x}} - \lambda^T A x + x^T C^T C x / 2 - \lambda^T B B^T \lambda / 2) dt + x_0^T G_0^{-1} x_0 / 2, \quad (20a)$$

$$\Pi_2 = \int_0^T x^T L^T L x / 2 dt, \quad (20b)$$

其中 x, λ 为独立变分的向量. 显然 Π_2 为非负, 而变分函数 x, λ 的选择如令满足(12a)式, 则

$$\Pi_1 = \int_0^T (x^T C^T C x / 2 + \lambda^T B B^T \lambda / 2) dt + x_0^T G_0^{-1} x_0 / 2 > 0. \quad (20a')$$

(19)式可写成 Rayleigh 商的形式(具二类变量的扩展形式)

$$\gamma_{cr}^{-2} = \min_x \max_\lambda (\Pi_1 / \Pi_2), \quad (21)$$

变分原理(19)、(21)式中已将 γ^{-2} 加上了下标 cr , 这是因为如果 $\gamma^{-2} < \gamma_{cr}^{-2}$, 则由于已设 $y = \hat{z} = 0$, 原问题只有平凡解 $x = \lambda = 0$. 事实上这是一个本征值问题, 并且与数理方法中的自伴算子本征问题一样. H_∞ 滤波或 H_∞ 控制只要其最小本征值.

2 区段混合能

上节变分原理的积分上、下限是给定的 $[0, T]$. 为了推导 Riccati 方程及作精细积分的需要, 应引入区段(时段)混合能. 令时刻 $t_a, t_b, 0 < t_a < t_b < T$, 并组成区段 (t_a, t_b) . 如给出 t_a 时的状态向量 x_a 及 t_b 时的状态向量 λ_b , 则区段内的 x, λ 也已确定. 定义区段混合能^[2,3]

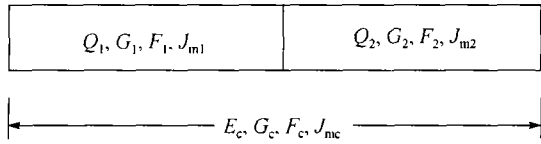
$$V(x_a, \lambda_b) = \lambda_b^T x_b - \int_{t_a}^{t_b} [\lambda^T \dot{\hat{x}} - H(x, \lambda)] dt, \quad (22)$$

它显然是 x_a, λ_b 的二次齐次式,其一般形式为

$$V(x_a, \lambda_b) = \lambda_b^T F x_a - x_a^T Q x_a / 2 + \lambda_b^T G \lambda_b / 2, \quad (23)$$

其中 $Q(t_a, t_b), G(t_a, t_b), F(t_a, t_b)$ 皆为 $n \times n$ 阵,且 $Q^T = Q, G^T = G$.

区段混合能 (t_a, t_b) 与 (t_b, t_c) 可以合并为 (t_a, t_c) 的区段混合能(图 1),其合并公式为



$$Q_c = Q_1 + F_1^T (Q_2^{-1} + G_1)^{-1} F_1, \quad (24)$$

$$G_c = G_2 + F_2 (G_1^{-1} + Q_2)^{-1} F_2^T, \quad (25)$$

图 1 区段合并

$$F_c = F_2 (I + G_1 Q_2)^{-1} F_1, \quad (26)$$

区段合并可递归地运用. 然而 Q, G, F 只表示了区段两端的特性,尚不足以表达区段的内部特点. 当前关心的是本征值 γ_{cr}^{-2} ,因此按 W-W 算法,其本征值计数是必要的. 原有的 W-W 算法^[6]是对于两端为给定位移边界的,按结构力学与最优控制相模拟的理论,这相当于 t_a, t_b 两端都给定 x , 不适用于当前之用. 文献^[7]提出扩展的 W-W 算法,适用于混合能 x_a, λ_b 的 Q, G, F 表达之补充. 用于区段合并计算,其补充公式为

$$J_{mc}(\omega_\#) = J_{m1}(\omega_\#) + J_{m2}(\omega_\#) - s\{G_1\} + s\{G_1^{-1} + Q_2\}, \quad (27)$$

其涵义为: $\omega_\#^2 = \gamma_\#^{-2}$ 乃给定参数,用于界定本征值计数;用 $J_{m1}(\omega_\#)$ 表示某区段 (t_a, t_b) 在其两端 $x_a = 0, \lambda_b = 0$ 的条件下,其内部本征值小于 $\omega_\#^2$ 的计数, J_{m1} 当然也是 t_a, t_b 的函数,但为了简单就不写为 $J_{m1}(\omega_\#, t_a, t_b)$ 了; J_{m2}, J_{mc} 意义同; $s\{M\}$ 则表示若将 M 阵三角分解为 $M = LDL^T, D$ 阵出现负值的对角元个数.

这样,区段混合能的表达应为 (Q, G, F, J_m) ,即 3 个矩阵及一个计数,它们当然都是二端时刻 t_a, t_b 及参数 $\omega_\#^2 = \gamma_\#^{-2}$ 的函数. 通常 $\gamma_\#^{-2}$ 不显式写出,只写为 $Q(t_a, t_b)$ 等. 在此之前的推导适用于线性时变系统. 当系统为时不变时, Q, G, F, J_m 只与 $\Delta t = (t_b - t_a)$ 有关,记为

$$Q = Q(\Delta t), G = G(\Delta t), F = F(\Delta t), \Delta t = t_b - t_a \quad (28)$$

等. 这些矩阵满足微分方程组^[2,3]

$$dQ/d(\Delta t) = F^T (C^T C - \gamma_\#^{-2} L^T L) F = (C^T C - \gamma_\#^{-2} L^T L) + A^T Q + QA - QBB^T Q, \quad (29)$$

$$dG/d(\Delta t) = FBB^T F^T = BB^T + AG + GA^T - G(C^T C - \gamma_\#^{-2} L^T L)G, \quad (30)$$

$$dF/d(\Delta t) = F(A - BB^T Q) = [A - G(C^T C - \gamma_\#^{-2} L^T L)]F, \quad (31)$$

这给出了 Q, G, F 与原有系统阵 A, B, C, L 之间的关系. 初值条件为

$$Q = G = 0, F = I_n, J_m = 0, \text{ 当 } \Delta t = 0 \text{ 时.} \quad (32)$$

若选用 $t_a = 0$,则微分方程(30)与(6)式相同,只有初值条件 $G = 0$ 与(6)式中的不同. 但只要对任一点 $t \in (0, T)$ 求出 Q, G, F, J_m 之后,再执行

$$\bar{G} = G + F(G_0^{-1} + Q)^{-1} F^T, \quad (33)$$

即可;相应地给出计数的修改

$$J_m := J_m - s\{G_0\} + s\{G_0^{-1} + Q\}, \quad (34)$$

此时 $J_m = 0$ 表明 $\gamma_\#^{-2}$ 使 H_∞ 滤波次优解存在. 既然能判定任给的 $\gamma_\#^{-2}$,次优解是否存在,当然就可运用例如对分法,将本征值 γ_{cr}^{-2} 找出到任意指定的精度.

3 精细积分

直接由 Riccati 方程作数值积分将面临非线性微分方程. 精细积分会同 W-W 算法将给 Riccati 微分方程及其本征值提供计算机上几乎是精确的解答. 积分总得给一个步长 Delt , 这应是不大的值, 例如取 $\text{Delt} = T/N_s$ ($N_s = 16$ 或 32). 现选择非常小的时段 τ

$$\tau = \text{Delt}/2^N, \quad \text{如选 } N = 20, \quad 2^N = 1\,048\,576. \quad (35)$$

对于这样小的一个时段 τ , 采用 Taylor 级数展开将给出很精确的结果.

精细积分利用混合能时段合并消元进行积分. 方程(29)~(31)提供了非线性微分方程组, (32)式则有初值条件. 对此方程组的 τ 时段, 正可采用幂级数展开求解. 设在 τ^4 后截断

$$Q(\tau) \approx \theta_1\tau + \theta_2\tau^2 + \theta_3\tau^3 + \theta_4\tau^4, \quad (36)$$

$$G(\tau) \approx g_1\tau + g_2\tau^2 + g_3\tau^3 + g_4\tau^4, \quad (37)$$

$$F(\tau) \approx I + F'(\tau), \quad F'(\tau) = f_1\tau + f_2\tau^2 + f_3\tau^3 + f_4\tau^4, \quad (38)$$

代入方程(29)~(31), 并比较 τ 的各幂次系数, 有

$$\begin{aligned} \theta_1 &= C^T C - \gamma_{\#}^{-2} L^T L, \quad g_1 = B B^T, \quad f_1 = A; \\ \theta_2 &= (f_1^T \theta_1 + \theta_1 f_1)/2, \quad g_2 = (A g_1 + g_1 A^T)/2, \quad f_2 = (A f_1 - g_1 \theta_1)/2; \\ \theta_3 &= (f_2^T \theta_1 + \theta_1 f_2 + f_1^T \theta_1 f_1)/3, \quad g_3 = (A g_2 + g_2 A^T - g_1 \theta_1 g_1)/3, \\ f_3 &= (A f_2 - g_2 \theta_1 - g_1 \theta_1 f_1)/3; \\ \theta_4 &= (f_3^T \theta_1 + \theta_1 f_3 + f_2^T \theta_1 f_1 + f_1^T \theta_1 f_2)/4, \\ g_4 &= (A g_3 + g_3 A^T - g_2 \theta_1 g_1 - g_1 \theta_1 g_2)/4, \\ f_4 &= (A f_3 - g_3 \theta_1 - g_2 \theta_1 f_1 - g_1 \theta_1 f_2)/4. \end{aligned} \quad (39)$$

这些公式只要逐个计算便可. 不需迭代求解. 其中 θ_i, g_i, f_i ($i = 1 \sim 4$) 皆为 $n \times n$ 阵, 并且 $\theta_i^T = \theta_i, g_i^T = g_i$.

按(36)~(38)式算得 $Q(\tau), G(\tau), F'(\tau)$, 再因时段 τ 特别小, 必然有 $J_m(\tau) = 0$, 这就给出了时段长为 τ 的混合能表达, 可以作为时段合并 2^N 算法的出发段.

以前的全部公式推导都是精确的, 只有(36)~(38)的展开式截断有误差. 截断项已是 τ^5 , 其与首项之比是 τ^4 . 由于 $\tau^4 = (\text{Delt}/1\,048\,576)^4 \approx \text{Delt}^4 \cdot 10^{-24}$, 这个相对误差乘子已经超出了倍精度实数的有效位数 10^{-16} 之外了. 故而这一步的近似实际也已达到计算机精度了.

有了时段 τ 的混合能表示, 就可递归地执行(24)~(27)式 N 次, 得到时段长为 Delt 的 (Q, G, F, J_m) . 但应当特别注意, 在计算(26)式时, (38)式中的 $I + F'$ 加法一定不可执行, 因为当 τ 很小时, F' 也很小, 这将严重地降低计算精度. 为此可采用

$$Q_c = Q + (I + F')^T (Q^{-1} + G)^{-1} (I + F'), \quad (40)$$

$$G_c = G + (I + F')(G^{-1} + Q)^{-1} (I + F')^T, \quad (41)$$

$$F'_c = (F' - GQ/2)(I + GQ)^{-1} + (I + GQ)^{-1}(F' - GQ/2) + F'(I + GQ)^{-1}F', \quad (42)$$

以代替(26)~(28)式, 这是用于 $Q_1 = Q_2, G_1 = G_2, F'_1 = F'_2$ 的情况的.

至此精细积分的公式已经备齐. 控制论中 Riccati 方程的解总要求正定对称. 在有限时段时, 要求在最后执行(33)、(34)式后 $J_m = 0$, 就算合格; 在区段合并中间的 $J_m > 0$ 即已表明不

行. 在无限时段计算中, 只要 $J_m > 0$ 出现, 就表示该 $\gamma_{\#}^{-2}$ 是不可实现的了. 最优 γ_{cr}^{-2} 算法只是次优解的不断对分法迭代.

篇幅所限, 具体算例从略. 其中 γ_{cr}^{-2} 是本征值的下界, 这是非常接近的数值, 算例表明, 可以精确到 5 位有效数字以上. 是从上、下界分别逼近的. 本征值 γ_{cr}^{-2} 在文献中认为是最优解, 但其 Riccati 方程的解矩阵的特点是趋于奇异对称阵. 根据这种数值上无限增长的病态阵来导出其增益阵是否妥当还应推敲, 实际有意义的最优似应当从实用的角度加以探讨. 在选择“次优”参数 γ^{-2} 的滤波与控制设计中, B, C, L 等阵中, 仍有参数选择的余地. 结构力学中动力问题优化的研究似可供借鉴.

4 结束语

计算结构力学与最优控制相模拟的理论给两大领域架起了桥梁, 这对于双方都有意义. 但过去模拟理论只讲到 LQ 控制理论, 在本文中已用于 H_∞ 滤波. H_∞ 滤波与控制是目前解决鲁棒性问题较成功且较完善的理论体系, 故成为控制界近来的热点之一. H_∞ 理论需要较深的数学知识, 离不开泛函分析、算子理论、近世代数等多方面的数学基础, 往往使初学者为之却步, 其计算也不很方便. 然而本文用结构力学与最优控制的模拟理论却指出, H_∞ 的导引模指标 γ^{-2} 的界, 正对应于结构力学柱形结构的弹性振动基本固有频率, 或 Euler 稳定性最小临界值, 即变分的 Rayleigh 商. 从而一整套精细积分与扩展的 W-W 算法就移植到了 H_∞ 滤波的计算中. 与 H_∞ 控制状态反馈的精细计算类同^[8].

如果说 LQG 理论对应于柱形结构的静力学, 则 H_∞ 最优指标正对应于其结构动力学, 这是意味深长的. 再进一步看, 现代控制论主要处理 n 维状态变量问题, n 在整个过程中是不变的. 这对于受控对象的区域发生变动, 如移动边界问题, 就不易适应. 对此, 结构力学的经验也许可供借鉴. 总之, 两大领域的互相沟通是有前景的.

参 考 文 献

- 1 Green M, Limebeer D J N. Linear Robust Control. New York: Prentice-Hall, 1995
- 2 钟万勰, 欧阳华江, 邓子辰. 计算结构力学与最优控制. 大连: 大连理工大学出版社, 1993
- 3 钟万勰, 钟翔翔. LQ 控制区段混合能矩阵的微分方程及其应用. 自动化学报, 1992, 18(3): 325 ~ 331
- 4 钟万勰. 矩阵黎卡提方程的精细积分方法. 计算结构力学及其应用, 1994, 11(2): 113 ~ 119
- 5 Zhong W X, Zhong X X. Computational structural mechanics, optimal control and semi-analytical method for PDE. Computers & Structures, 1990, 37: 993 ~ 1 004
- 6 Wittrick W H, Williams F W. A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures. Quart J Mech & Appl Math, 1971, 24: 263 ~ 284
- 7 Zhong W X, Williams F W, Bennett P N. Extension of the Wittrick-Williams algorithm to mixed variable systems. Trans ASME J Vib Acous, 1997, 119(7): 334 ~ 340
- 8 钟万勰. H_∞ 控制状态反馈与瑞利商精细积分. 计算力学学报, 1999, 16(1): 1 ~ 7